整数と余りについての問題

はじめに

例題 0
7 で割ると 2 余る数を小さい順に 10 個書きなさい。

このプリントの説明をするうえで、前提にしている知識を確認します。
この例題の答えは、$2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65$ です。次の二つを確認してください

1. 上の 10 個の数は、7 ずつ増えている。余りが同じ数を用意するためには、割る数と同じ大きさだけ足していく。
2. 言い換えると、割る数と同じだけ増やすと、あまりは変化しない。

とても大事なことです。以下ではこれを何度も使います。

例題 1
5 で割ると 3 余り、9 で割ると 2 余る数を、小さい順に 3 個書きなさい。

中学受験でよく出るものですが、よく聞くやり方はこういうものです。

求める数より 7 大きい数は、5 でも 9 でも割り切れるので、5 と 9 の公倍数から 7 引いた数を考えて、一番小さいものは $45 - 7 = 38$ である。
余りを変えずにあと 2 つ探すには、9 の倍数であり 5 の倍数でもある数を足せばよい。最小公倍数が 45 だから、残りの答えは $38 + 45 = 83$ と $83 + 45 = 128$

確かにこれであっていますが、**太字部分**を考える作業が、数字によっては大変です。のちのち割る数が 3 個になったりもっと大きな数になったりするので、あまり考え込まなくていいやり方をここで説明します。そもそも**「あと 7 だけ大きいと割り切れる」**ことは、地道に調べるしかないです。

手順

手順を説明します。上の解き方と違うのは、最初の数 38 を見つけるところまでです。それより後は同じ考え方です。

1. 割る数（5 と 9）の内、大きいほうに注目し、「9 で割ると 2 余る数」をいくつか書きます。
2. 最大で何個書くかというと、小さいほうが 5 なので、「9 で割ると 2 余る数」を 5 個書きます。$(2, 11, 20, 29, 38)$
3. この中に必ず、「5 で割ると 3 余る数」が含まれています。何番目かは決まっていませんから、5 個の数を順に調べてください。

これだけです。おわり！あとは、最小公倍数 45 を足していって、2 番目 3 番目を探してください。（5 と 9 の立場を逆にしてもできます。つまり、5 で割って 3 余る数を 9 個調べても 38 が見つかります。）
以下、延々と例題を出し、このやり方で説明します。ただし、このやり方でうまくいく理由は説明しません。興味があれば考えてみてください。（「等差数列をある整数で割ったあまりは規則的になる」ということが関わってきます。）

Copyright 2009 かみのドリル http://kaminodrill.sakura.ne.jp/

注意

どんな数の組み合わせでも見つかりますが、ありえない数は見つかりません。例えば、2 で割ると 1 余り、4 で割ると 2 余る数というものは、**奇数であり偶数でもある数**を探すことになるので、見つかりません。）

例題２
7 で割ると 3 余り、11 で割ると 1 余る数を、小さい順に 3 個書きなさい。

11 で割ると 1 余る数を 7 個書きます。

$$1, 12, 23, 34, 45, 56, 67$$

調べてみると、$45 \div 7 = 6$ あまり 3 です。7 と 11 の最小公倍数は 77 なので、45 にこれを足していき、求める 3 つの数は $45, 122, 199$ です。（余りを確かめてみてください）

例題３
5 で割ると 3 余り、20 で割ると 1 余る数を、小さい順に 3 個書きなさい。

20 で割ると 1 余る数を 5 個書きます。

$$1, 21, 41, 61, 81$$

調べてみても、見つかりません。原因は、「そんな数は存在しないから」です。問題で出される以上、こういう数を聞いてくるはずがないので、何も心配いりません。

例題４
5 で割ると 4 余り、8 で割ると 2 余り、9 で割ると 5 余る数を小さいほうから **2** 個答えなさい。

割る数が 3 種類出てきたときは、まず大きいほう 2 つについて、今の作業をやりましょう。9 で割ると 5 余る数を 8 個書きます。

$$5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68$$

この中で、8 で割ると 2 余る数を探すと、50 が見つかります。つぎに、50 に 9 と 8 の最小公倍数 72 をどんどん足して、5 個の数を書きます。

$$50, 122, 194, 266, 338$$

このなかで、5 で割って 4 余る数を探すと、194 が見つかります。これがひとつめの答えです。割る数が 5 だから 5 個書くといいましたが、小さいほうから書いていって、途中で見つかればそこでやめていいです。最後に、この 194 に、$5, 8, 9$ の最小公倍数 360 を足して、554 が二つ目の答えです。この例題のように割る数が 3 種類のときは、作業を 2 段階で行います。

例題５
5 で割ると 4 余り、8 で割ると 2 余る数のうち、３けたで最も小さいものを答えなさい。

とりあえず３けたという条件は無視して、一番小さいものを探します。（例題１から４と同じなので略）一番小さいのは 34 で、これに最小公倍数 40 を３けたになるまで足していき、114 が見つかります。

Copyright 2009 かみのドリル http://kaminodrill.sakura.ne.jp/