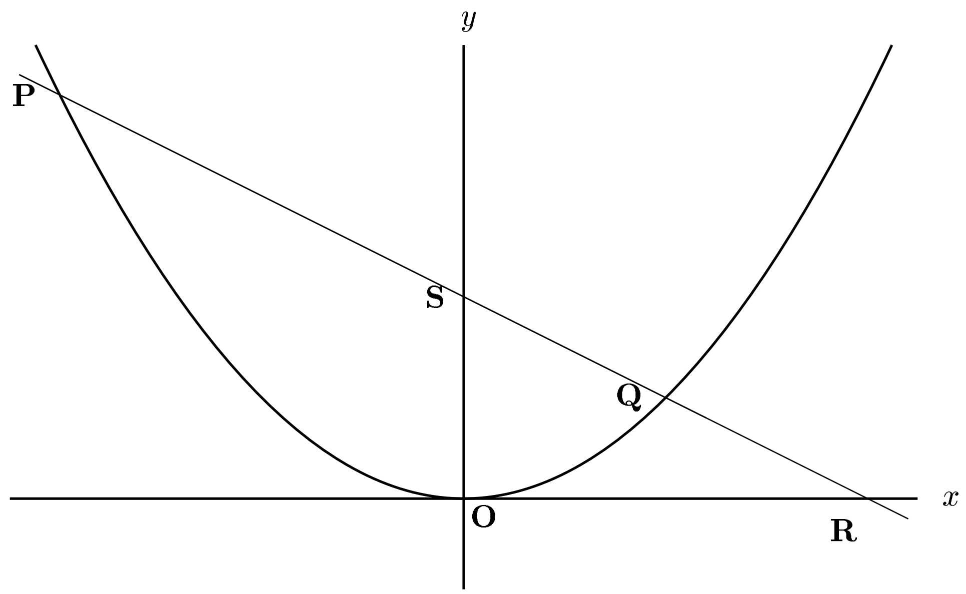
２次関数と直線の交点Ⅰ　例題

図のような２次関数 $y = \dfrac{3}{4}x^2$ と直線 ℓ が２点 P、Q で交わっています。
ℓ と x 軸との交点を R、y 軸との交点を S とします。点 P の x 座標が $-\dfrac{4}{3}$、点 Q の x 座標が $\dfrac{2}{3}$ であるとき、次の (1) から (5) までの座標や値を求めなさい。



(1) 点 P、Q の座標

(2) 直線 ℓ の傾き

(3) 点 S の座標

(4) 点 R の座標

(5) 三角形 POQ の面積

解答・計算の例

説明のため点 P の x 座標を p、点 Q の x 座標を q とします。

(1) 点 P、Q の座標

$y=\frac{3}{4}x^2$ にそれぞれの x 座標の値を代入して y 座標を計算します。

(点 P) $y=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$ (点 Q) $y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

したがって座標は、

$\underline{\mathrm{P}\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)}$ $\underline{\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$

(2) 直線 ℓ の傾き

(1) の結果から 2 点を通る直線の傾きを計算すればよいのですが、今後楽をするために、数値は代入せずに文字 a、p、q のままで傾きを計算してみます。

$$\frac{(y\text{ 座標の増減})}{(x\text{ 座標の増減})}=\frac{ap^2-aq^2}{p-q}=\frac{a(p^2-q^2)}{p-q}=\frac{a(p+q)(p-q)}{p-q}=a(p+q)$$

ℓ の傾きは（x^2 の係数）と（2 交点の x 座標の和）の積と等しくなることがわかりました。（念のため書いておくと、この式は 2 次関数が y 軸に関して対称である場合に限定した話です。高校で習うより一般的な 2 次関数の場合でも使える式というのも同じようにやれば簡単に作れますし、見た目もこれと大変よく似ていますが、同じではないです。）

今の場合の数値を代入すると、

$$\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\underline{-\frac{1}{2}}$$

(3) 点 S の座標 (4) 点 R の座標

この 2 問は ℓ の切片を求めることと同じです。傾きを求める式を作ったので、それを使い文字のままで直線 ℓ の式を作りましょう。$\mathrm{P}(p,ap^2)$ を通り傾き $a(p+q)$ の直線の式は

$$y-ap^2=a(p+q)(x-p)$$

となります。（一次関数の内容なのでこの公式の説明は省略します。）この式をできるだけ計算して簡単にしましょう。

$$\begin{aligned}y&=a(p+q)(x-p)+ap^2\\&=a(p+q)x-ap^2-apq+ap^2\\&=a(p+q)x-apq\end{aligned}$$

直線の式の定数項 $-apq$ が y 切片です。

$$-apq=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

となりますから、$\underline{\mathrm{S}\left(0,\frac{2}{3}\right)}$ が (3) の答えです。

さらに、直線 ℓ の式に $y=0$ を代入したものを x について解くと、

$$x=\frac{apq}{a(p+q)}=\frac{pq}{p+q}$$

これが x 切片です。今の場合は、

$$\frac{pq}{p+q}=\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{2}{3}}{\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{8}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}$$

となるので、$\underline{\mathrm{R}\left(\frac{4}{3},0\right)}$ が (4) の答えです。

(5) 三角形 POQ の面積

三角形 POQ は、POS と SOQ の 2 個に分けられるので、底辺 $\overline{\mathrm{OS}}$ 高さ $q-p$ として計算できます。

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times(q-p)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right)=\underline{\frac{2}{3}}$$

まとめ

$y=ax^2$ と直線が 2 個の交点を持ち、その x 座標が p、$q(p+q\neq0)$ であるとき

x **軸との交点**は $\left(\frac{pq}{p+q},0\right)$、$y$ **軸との交点**は $(0,-apq)$、**直線の式**は $y=a(p+q)x-apq$

特に、x 軸との交点については、p,q のみで $y=ax^2$ の a にかかわらず決まることに注意してください。